PART2 1次不定方程式

要点① 1次不定方程式

a，b，c は整数で，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とするとき，x，y の1次方程式

$ax+by=c$

を成り立たせる実数 x，y の組は無数に存在する。この方程式のことを「(2元)1次不定方程式」という。また，この方程式を成り立たせる整数 x，y の組を，この方程式の「　　　　　」という。

例 方程式 $4x-3y=0$ の整数解を求める。

この方程式を変形すると $4x=3y$ …… ①

4，3は　　　　　　　より，x は　の倍数である。

よって，$x=$　　(k は整数)と表される。

このとき，①より $4 \cdot 3k=3y$ よって，$y=$　　と表される。

したがって，求める整数解は $x=3k$，$y=4k$ (k は整数)

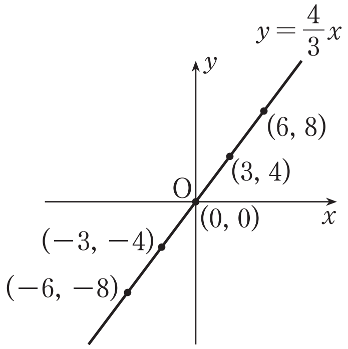
この整数解において

$k=0$ のとき $(x,\ y)=(0,\ 0)$

$k=1$ のとき $(x,\ y)=(3,\ 4)$

である。整数 k は無数に存在するので，方程式

$4x-3y=0$ の整数解も無数に存在する。



要点② $ax+by=1$ の整数解

1次不定方程式 $ax+by=1$ (a，b は互いに素)について，この方程式を満たす整数 x，y のうち1組(これを「特殊解」という)を見つけることで，すべての解(「一般解」という)を求めることができる。

例 方程式 $4x-3y=1$ …… ①の整数解を求める。

この方程式の整数解の1つは $x=1$，$y=$

よって $4 \cdot 1-3 \cdot 1=1$ …… ②

①－②より　$4(x-1)-3(y-1)=$　　　　つまり $4(x-1)=3(y-1)$ …… ③

4と3は　　　　　　　より，$x-1$ は　の倍数である。

よって，$x-1=$　　(k は整数)と表される。

このとき，③より $4 \cdot 3k=3(y-1)$　　　$y-1=4k$

したがって，求める整数解は　$x=$　　　，$y=$　　　(k は整数)

[MEMO]

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x-5y=0$　　　(2)　$8x+5y=1$

Point Pickup

互いに素である２つの整数と倍数

k を整数とする。

a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

１次不定方程式 $ax+by=1$（a，b は互いに素）の整数解

方程式を満たす１組の解(特殊解)を見つける。

その解を方程式に代入した式と，方程式との差をとる。

第11講 PART2 確認問題

1 方程式 $2x-7y=0$ の整数解は,

$x=$ [ア] k, $y=$ [イ] k (k は整数)

と表される。

2 方程式 $3x-5y=1$ ……①の整数解を求める。

この方程式の整数解の1つは, $x=2$, $y=$ [ウ] であるから,

$3\cdot2-5\cdot$ [ウ] $=1$ ……②

①－②より,

$3(x-2)-5(y-$ [ウ] $)=0$

3と5は互いに素より,

$x-2$ は [エ] の倍数であるから,

$x-2=$ [エ] k (k は整数)

と表される。

よって, 求める整数解は,

$x=$ [エ] $k+2$, $y=$ [オ] $k+$ [カ] (k は整数)

である。

PART2　1次不定方程式

2　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x-5y=0$　　　　(2)　$8x+5y=1$

[解答]

(1)　$3x-5y=0$ を変形すると $3x=5y$ …… ①

3と5は互いに素より，x は5の倍数である。

よって，$x=5k$ (k は整数)と表される。

このとき，①より $3\cdot 5k=5y$　　$y=3k$

したがって，求める整数解は　$x=5k$，$y=3k$ (k は整数)

(2)　$8x+5y=1$ …… ①

この方程式の整数解の1つは $x=2$，$y=-3$

よって　$8\cdot 2+5\cdot(-3)=1$ …… ②

①－②より　$8(x-2)+5(y+3)=0$　　つまり　$8(x-2)=5(-y-3)$ …… ③

8と5は互いに素より，$x-2$ は5の倍数である。

よって，$x-2=5k$ (k は整数) と表される。

このとき，③より $8\cdot 5k=5(-y-3)$　　$8k=-y-3$　　$y+3=-8k$

したがって，求める整数解は　$x=5k+2$，$y=-8k-3$ (k は整数)

第11講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：2

[解説]

$2x-7y=0$ より，

$$2x=7y \quad \cdots\cdots ①$$

2 と 7 は互いに素であるから，x は 7 の倍数である。

よって，$x=7k$（k は整数）[A]

と表される。このとき，①より，

$$2\cdot 7k=7y$$

$$y=2k$$

以上より，求める整数解は，

$$\boldsymbol{x=7k,\ y=2k}\ （k \text{ は整数}）$$

[A]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

2

[正解] ウ：1，エ：5，オ：3，カ：1

[解説]

$$3x-5y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=2$ のとき，$6-5y=1$　　$y=1$ [B]

よって，$x=2$，$y=1$ は①の整数解の 1 つであり，

$$3\cdot 2-5\cdot 1=1 \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。①－②より，

$$3(x-2)-5(y-1)=0$$

$$3(x-2)=5(y-1) \quad \cdots\cdots ③$$

3 と 5 は互いに素であるから，$x-2$ は 5 の倍数である。

よって，$x-2=5k$（k は整数）[C]

と表される。このとき，③より，

$$3\cdot 5k=5(y-1)$$

$$y-1=3k$$

$$y=3k+1$$

したがって，求める整数解は，

$$\boldsymbol{x=5k+2,\ y=3k+1}\ （k \text{ は整数}）$$

[B]　方程式を満たす 1 組の解（特殊解）を見つける。
その解を方程式に代入した式と，方程式との差をとる。

$$\begin{array}{rl} & 3x-\quad 5y=1 \\ -) & 3\cdot 2-\quad 5\cdot 1=1 \\ \hline & 3(x-2)-5(y-1)=0 \end{array}$$

[C]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。